# Wurzelgleichungen

W. Kippels

20. Mai 2024

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

# 2 Grundlagen

Beim Lösen mathematischer Probleme stößt man gelegentlich auch auf Gleichungen, die eine oder auch mehrere Quadratwurzeln enthalten. Diese Gleichungen nennt man ***Wurzelgleichungen***. Hier ein Beispiel:

$$5 + \sqrt{5x-1} = x$$

Im folgenden möchte ich Strategien vorstellen, wie man solche Gleichungen lösen kann.

Die erste Idee, die mancher vielleicht hat, lautet:„Man müsste die Gleichung quadrieren, dann ist die Wurzel weg.“ Leider klappt das nur, wenn man auf diese Weise die Binomischen Formeln missachtet:

$$\begin{array}{rcll} 5 + \sqrt{5x-1} & = & x & \mid (\ )^2 \\ 25 + (5x-1) & = & x^2 & \end{array}$$

Leider ist das falsch. Es gibt nämlich keine Formel, die lauten würde: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Richtig hingegen ist: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Beachtet man diese Formel, erhält man:

$$\begin{array}{rcll} 5 + \sqrt{5x-1} & = & x & \mid (\ )^2 \\ 25 + 10 \cdot \sqrt{5x-1} + (5x-1) & = & x^2 & \end{array}$$

Das hilft also nicht weiter. Es ist immer noch eine Wurzel da. Abhilfe ist jedoch möglich, wenn man vor dem Quadrieren dafür sorgt, dass die Wurzel allein auf einer Seite steht:

$$\begin{array}{rcll} 5 + \sqrt{5x-1} & = & x & \mid -5 \\ \sqrt{5x-1} & = & x-5 & \mid (\ )^2 \\ 5x-1 & = & x^2 - 10x + 25 & \end{array}$$

Jetzt haben wir eine „normale“ Quadratische Gleichung[1] erhalten, die keine Wurzel mehr enthält. Diese kann nun gelöst werden:

$$\begin{array}{rcll} 5x-1 & = & x^2 - 10x + 25 & \mid -5x+1 \\ 0 & = & x^2 - 15x + 26 & \\ x_{1/2} & = & \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 26} & \\ & = & \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{104}{4}} & \\ & = & \frac{15}{2} \pm \frac{11}{2} & \end{array}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{26}{2} = 13$$

[1] Eine Anleitung zum Lösen Quadratischer Gleichungen (einschließlich Übungsaufgaben mit Lösungen) ist hier zu finden: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

Offenbar haben wir die Lösungsmenge $L = \{2; 13\}$.

Führen wir sicherheitshalber einmal eine Probe durch. Beginnen wir mit $x_1 = 2$.

$$\begin{aligned} 5 + \sqrt{5x-1} &= x \\ 5 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1} &= 2 \\ 5 + \sqrt{9} &= 2 \\ 5 + 3 &\neq 2 \end{aligned}$$

Nanu, was ist denn da passiert? Die Probe geht **nicht** auf! Haben wir etwa einen Rechenfehler gemacht? Führen wir vor weiteren Überlegungen erst noch die Probe mit $x_2 = 13$ durch.

$$\begin{aligned} 5 + \sqrt{5x-1} &= x \\ 5 + \sqrt{5 \cdot 13 - 1} &= 13 \\ 5 + \sqrt{64} &= 13 \\ 5 + 8 &= 13 \end{aligned}$$

Erstaunlicherweise(?) geht diesmal die Probe auf, haben wir uns doch nicht verrechnet?

Sehen wir uns das Ergebnis der Probe mit $x_1 = 2$ einmal genau an. Wenn vor der Wurzel ein Minuszeichen gestanden hätte, dann würde die letzte Zeile lauten:

$$5 - 3 = 2$$

Das wäre richtig. Im Schritt 2, in dem wir die Gleichung (und damit auch die Wurzel) quadriert haben, wäre dieses Minuszeichen vor der Wurzel „wegquadriert" worden. Zeile 3 hätten wir also sowohl mit einem Pluszeichen, als auch mit einem Minuszeichen vor der Wurzel erhalten. **Wir haben also durch das Quadrieren eine Gleichung erhalten, die *mehr Lösungen* als die Originalgleichung hat.** Dieser Schritt war nämlich keine sogenannte ***Äquivalenzumformung***. Was das bedeutet, möchte ich im folgenden etwas konkretisieren.

Betrachten wir zunächst die Gleichung:

$$2x = 6$$

Die Lösungsmenge zu dieser Gleichung lautet:

$$L = \{3\}$$

Das bedeutet, dass die Gleichung **nur dann** eine **wahre** Aussage ergibt, wenn man für $x$ die Zahl 3 einsetzt. Alle anderen Werte für $x$ führen zu einer **falschen** Aussage.

Um die Gleichung zu lösen, also die Lösungsmenge zu bestimmen, würde man die Gleichung durch 2 dividieren. Wir erhalten eine neue Gleichung, die aber **äquivalent** zur ursprünglichen Gleichung ist. Das bedeutet, sie hat die **selbe Lösungsmenge**. Aus

Gleichung $A$ folgt Gleichung $B$, aber auch aus Gleichung $B$ folgt Gleichung $A$. Man kann das durch das Äquivalenz-Zeichen $\Leftrightarrow$ ausdrücken:

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & 2x & = & 6 & |:2 \\ \Leftrightarrow & (B) & x & = & 3 & \end{array}$$

Man kann eine gegebene Gleichung durch eine beliebige Zahl dividieren, man erhält immer eine zur ursprünglichen Gleichung **äquivalente** Gleichung, also eine Gleichung mit der selben Lösungsmenge. Das gleiche gilt auch uneingeschränkt für die Addition oder Subtraktion mit einer beliebigen Zahl. Immer erhält man eine äquivalente Gleichung, wie in diesen Beispielen:

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & x-2 & = & 3 & |+2 \\ \Leftrightarrow & (B) & x & = & 5 & \end{array}$$

oder auch:

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & x+1 & = & 7 & |-1 \\ \Leftrightarrow & (B) & x & = & 6 & \end{array}$$

Interessant wird es schon bei der Multiplikation. Zwar gilt:

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & 0{,}2x & = & 4 & |\cdot 5 \\ \Leftrightarrow & (B) & x & = & 20 & \end{array}$$

oder auch:

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & -x & = & 4 & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow & (B) & x & = & -4 & \end{array}$$

Wenn ich aber mit der Zahl Null multipliziere, dann habe ich keine Äquivalenz mehr, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & x & = & 5 & |\cdot 0 \\ \Rightarrow & (B) & 0x & = & 0 & \end{array}$$

Die Gleichung $A$ hat die Lösungsmenge $L = \{5\}$, Gleichung $B$ aber die Lösungsmenge $L = \mathbb{R}$. Ich kann dort für $x$ jede beliebige Reelle Zahl einsetzen, die Gleichung stellt **immer** eine **wahre** Aussage dar. Es gilt **nicht** mehr $A \Leftrightarrow B$, sondern $A \Rightarrow B$. Anders ausgedrückt: Aus Gleichung A folgt zwar Gleichung B, aber aus Gleichung B folgt nicht Gleichung A. Noch anders ausgedrückt: Wir haben durch die Multiplikation mit der Zahl Null die Lösungsmenge erweitert.

Glücklicherweise kommt man eigentlich nie auf die Idee, im Zuge einer Gleichungslösung die Gleichung mit Null multiplizieren zu wollen, weil dann nichts mehr übrig bleibt. Es kann aber vorkommen, dass man eine Gleichung **quadrieren** möchte. Auch das Quadrieren stellt eine **nicht äquivalente** Umformung dar, sondern eine sogenannte **Implikation**. Nachfolgendes Beispiel soll das zeigen.

$$\begin{array}{rrrcll} & (A) & x & = & 3 & |(\ )^2 \\ \Rightarrow & (B) & x^2 & = & 9 & \end{array}$$

Gleichung $A$ hat die Lösungsmenge $L = \{3\}$, Gleichung $B$ hat aber die Lösungsmenge $L = \{3; -3\}$, denn es gilt nicht nur $3^2 = 9$, sondern auch $(-3)^2 = 9$. Anders ausgedrückt: Wenn $x = 3$ eine wahre Aussage ist, dann ist auch $x^2 = 9$ eine wahre Aussage, aber aus $x^2 = 9$ folgt **nicht**, dass $x = 3$ sein muss, denn $x = -3$ wäre ja auch möglich.

Was lernen wir daraus? Bei der Lösung von Wurzelgleichungen muss man an irgendeiner Stelle mindestens einmal quadrieren. Daher „schleichen" sich möglicherweise zusätzliche Lösungen ein, die aber nicht für die ursprüngliche Wurzelgleichungen gelten. Der einfachste Weg, diese zu erkennen und aus der tatsächlichen Lösungsmenge zu entfernen, liegt in der Durchführung einer Probe mit allen gefundenen Ergebnissen. Daraus ergibt sich folgender Merksatz:

Man muss nach dem Lösen einer Wurzelgleichung **stets** eine Probe machen.

# 3 Übungsaufgaben

Hier sind einige Übungsaufgaben zu Wurzelgleichungen zusammengestellt. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen! Denken Sie daran, dass vor Festlegung der Lösungsmenge die Proben erforderlich sind!

Die durchgerechneten Lösungen zu diesen Aufgaben finden Sie im nächsten Hauptkapitel.

## 3.1 Aufgabe 1

$$2+\sqrt{3x-2}=5x-6$$

## 3.2 Aufgabe 2

$$\sqrt{7x+15}=\sqrt{2x-5}+5$$

## 3.3 Aufgabe 3

$$x+2+\sqrt{24x-72}=5-x$$

## 3.4 Aufgabe 4

$$\sqrt{2x+4}-\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+16}-\sqrt{5x+9}$$

## 3.5 Aufgabe 5

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x-5}$$

## 3.6 Aufgabe 6

$$4\cdot\sqrt{3x+4}-4\cdot\sqrt{4x+1}=\frac{4\cdot\sqrt{3x+4}-1}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4x+1}}$$

## 3.7 Aufgabe 7

$$x-\sqrt{33-x^2-4x}=5$$

## 3.8 Aufgabe 8

$$\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}}=2$$

## 3.9 Aufgabe 9

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3}=\sqrt{11x+5}$$

## 3.10 Aufgabe 10

$$2x-26\cdot\sqrt{x}+72=0$$

## 3.11 Aufgabe 11

$$2x-3\cdot\sqrt{x}=2$$

## 3.12 Aufgabe 12

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5}=2$$

## 3.13 Aufgabe 13

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{2x-1}+6$$

## 3.14 Aufgabe 14

$$30x-16\cdot\sqrt{x}+2=0$$

## 3.15 Aufgabe 15

$$\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}$$

## 3.16 Aufgabe 16

$$\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1}=3$$

## 3.17 Aufgabe 17

$$3x-\sqrt{2x+30}+17=0$$

## 3.18 Aufgabe 18

$$\sqrt{7x-3}+\sqrt{6x+12}=1$$

## 3.19 Aufgabe 19

$$\frac{2}{\sqrt{x+6}}+\sqrt{x+6}=\frac{\sqrt{11-5x}}{2\cdot\sqrt{x+6}}$$

## 3.20 Aufgabe 20

$$\sqrt{5x+6} - \sqrt{2x+6} = \sqrt{10-6x} - \sqrt{5x+6}$$

## 3.21 Aufgabe 21

$$\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2+1}$$

# 4 Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Hier finden Sie die durchgerechneten Lösungen zu allen Aufgaben.

## 4.1 Lösung Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
2+\sqrt{3x-2} &= 5x-6 && \mid -2\\
\sqrt{3x-2} &= 5x-8 && \mid (\ )^2\\
3x-2 &= 25x^2-80x+64 && \mid -3x+2\\
0 &= 25x^2-83x+66 && \mid :25\\
0 &= x^2-\frac{83}{25}x+\frac{66}{25} && \mid \text{p-q-Formel}\\
x_{1/2} &= \frac{83}{50}\pm\sqrt{\frac{6\,889}{2\,500}-\frac{6\,600}{2\,500}}\\
x_{1/2} &= \frac{83}{50}\pm\frac{17}{50}\\
x_1=\frac{66}{50}=1{,}32 &\qquad x_2=\frac{100}{50}=2
\end{aligned}
$$

<u>**Probe mit $\mathbf{x_1 = 1{,}32}$:**</u>

$$
\begin{aligned}
2+\sqrt{3x-2} &= 5x-6\\
2+\sqrt{3\cdot 1{,}32-2} &= 5\cdot 1{,}32-6\\
2+\sqrt{1{,}96} &= 0{,}6\\
2+1{,}4 &\neq 0{,}6
\end{aligned}
$$

$x_1 = 1{,}32$ ist **keine** Lösung!

<u>**Probe mit $\mathbf{x_2 = 2}$:**</u>

$$
\begin{aligned}
2+\sqrt{3x-2} &= 5x-6\\
2+\sqrt{3\cdot 2-2} &= 5\cdot 2-6\\
2+\sqrt{4} &= 4\\
2+2 &= 4
\end{aligned}
$$

$x_2 = 2$ ist eine Lösung!

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{2\}}$

## 4.2 Lösung Aufgabe 2

$$\sqrt{7x+15} = \sqrt{2x-5} + 5$$

In dieser Aufgae haben wir sogar **zwei** Wurzeln! Leider ist es nicht möglich, beide Wurzeln **gleichzeitig** in einem Schritt zu eliminieren. Da eine Wurzel allein auf einer Seite steht, kann jedoch quadriert werden, um die linke Wurzel loszuwerden.

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{7x+15} & = & \sqrt{2x-5}+5 & |\ (\ )^2 \\
7x+15 & = & (2x-5)+10\cdot\sqrt{2x-5}+25 & \\
7x+15 & = & 2x+20+10\cdot\sqrt{2x-5} & |-2x-20 \\
5x-55 & = & 10\cdot\sqrt{2x-5} & |:5 \\
x-1 & = & 2\cdot\sqrt{2x-5} & |\ (\ )^2 \\
x^2-2x+1 & = & 4\cdot(2x-5) & \\
x^2-2x+1 & = & 8x-20 & |-8x+20 \\
x^2-10x+21 & = & 0 & |\ \text{p-q-Formel} \\
x_{1/2} & = & 5\pm\sqrt{25-21} & \\
x_{1/2} & = & 5\pm 2 & \\
x_1=3 & & x_2=7 &
\end{array}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1=3}$:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{7x+15} & = & \sqrt{2x-5}+5 \\
\sqrt{7\cdot 3+15} & = & \sqrt{2\cdot 3-5}+5 \\
\sqrt{36} & = & \sqrt{1}+5 \\
6 & = & 1+5
\end{array}$$

$x_1 = 3$ ist eine Lösung.

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2=7}$:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{7x+15} & = & \sqrt{2x-5}+5 \\
\sqrt{7\cdot 7+15} & = & \sqrt{2\cdot 7-5}+5 \\
\sqrt{64} & = & \sqrt{9}+5 \\
8 & = & 3+5
\end{array}$$

$x_2 = 7$ ist (auch) eine Lösung.

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{3;7\}}$

### 4.3 Lösung Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
x+2+\sqrt{24x-72} &= 5-x && \mid -x-2\\
\sqrt{24x-72} &= 3-2x && \mid (\ )^2\\
24x-72 &= 9-12x+4x^2 && \mid -24x+72\\
0 &= 4x^2-36x+81 && \mid :4\\
0 &= x^2-9x+\frac{81}{4} && \mid \text{p-q-Formel}\\
x_{1/2} &= \frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{81}{4}}\\
x_{1/2} &= \frac{9}{2}\pm 0\\
x &= 4{,}5
\end{aligned}
$$

**Probe mit $\mathbf{x = 4{,}5}$:**

$$
\begin{aligned}
x+2+\sqrt{24x-72} &= 5-x\\
4{,}5+2+\sqrt{24\cdot 4{,}5-72} &= 5-4{,}5\\
6{,}5+\sqrt{36} &= 0{,}5\\
6{,}5+6 &\neq 0{,}5
\end{aligned}
$$

Es gibt **keine** Lösung für die Gleichung, die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \{\ \}}$

## 4.4 Lösung Aufgabe 4

$$\sqrt{2x+4}-\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+16}-\sqrt{5x+9}$$

Hier haben wir gleich 4 Wurzeln! Durch Quadrieren kann man aber deren Zahl auf 2 reduzieren.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+4}-\sqrt{5x+1} &= \sqrt{2x+16}-\sqrt{5x+9} \quad |\ (\ )^2\\
2x+4-2\cdot\sqrt{2x+4}\cdot\sqrt{5x+1}+5x+1 &= 2x+16-2\cdot\sqrt{2x+16}\cdot\sqrt{5x+9}+5x+9\\
7x+5-2\cdot\sqrt{(2x+4)\cdot(5x+1)} &= 7x+25-2\cdot\sqrt{(2x+16)\cdot(5x+9)}\\
7x+5-2\cdot\sqrt{10x^2+2x+20x+4} &= 7x+25-2\cdot\sqrt{10x^2+18x+80x+144} \quad |-7x-5\\
-2\cdot\sqrt{10x^2+22x+4} &= 20-2\cdot\sqrt{10x^2+98x+144} \quad |\ (\ )^2\\
4\cdot(10x^2+22x+4) &= 400-80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144}+4\cdot(10x^2+98x+144)\\
40x^2+88x+16 &= 400-80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144}+40x^2+392x+576 \quad |-40x^2\\
88x+16 &= -80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144}+392x+976 \quad |-392x-976\\
-304x-960 &= -80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144} \quad |:(-16)\\
19x+60 &= 5\cdot\sqrt{10x^2+98x+144} \quad |\ (\ )^2\\
361x^2+2\,280x+3\,600 &= 25\cdot(10x^2+98x+144)\\
361x^2+2\,280x+3\,600 &= 250x^2+2\,450x+3\,600 \quad |-250x^2-2\,450x-3\,600\\
111x^2-170x &= 0 \quad |:111\\
x^2-\frac{170}{111}x &= 0\\
x\cdot\left(x-\frac{170}{111}\right) &= 0\\
x_1=0 &\qquad x_2=\frac{170}{111}
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=0}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\cdot0+4}-\sqrt{5\cdot0+1} &= \sqrt{2\cdot0+16}-\sqrt{5\cdot0+9}\\
\sqrt{4}-\sqrt{1} &= \sqrt{16}-\sqrt{9}\\
2-1 &= 4-3
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=\frac{170}{111}}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\cdot\frac{170}{111}+4}-\sqrt{5\cdot\frac{170}{111}+1} &= \sqrt{2\cdot\frac{170}{111}+16}-\sqrt{5\cdot\frac{170}{111}+9}\\
\sqrt{\frac{784}{111}}-\sqrt{\frac{961}{111}} &= \sqrt{\frac{2\,116}{111}}-\sqrt{\frac{1\,849}{111}}\\
\frac{28}{\sqrt{111}}-\frac{31}{\sqrt{111}} &= \frac{46}{\sqrt{111}}-\frac{43}{\sqrt{111}}\\
-\frac{3}{\sqrt{111}} &\neq \frac{3}{\sqrt{111}}
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{0\}}$

## 4.5 Lösung Aufgabe 5

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x-5}$$

Hier kann sofort quadriert werden.

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3} &=& \sqrt{2x-5} & |(\ )^2 \\
5x+1+2\cdot\sqrt{(5x+1)\cdot(4x-3)}+4x-3 &=& 2x-5 & |-9x+2 \\
2\cdot\sqrt{20x^2-15x+4x-3} &=& -7x-3 & |(\ )^2 \\
4\cdot(20x^2-11x-3) &=& 49x^2+42x+9 & \\
80x^2-44x-12 &=& 49x^2+42x+9 & |-49x^2-42x-9 \\
31x^2-86x-21 &=& 0 & |:31 \\
x^2-\frac{86}{31}x-\frac{21}{31} &=& 0 & \\
x_{1/2} &=& \frac{43}{31}\pm\sqrt{\frac{1\,849}{961}+\frac{651}{961}} & \\
x_{1/2} &=& \frac{43}{31}\pm\sqrt{\frac{2\,500}{961}} & \\
x_{1/2} &=& \frac{43}{31}\pm\frac{50}{31} & \\
x_1=-\frac{7}{31} && x_2=3 &
\end{array}$$

<u>**Probe mit $\mathbf{x_1=-\frac{7}{31}}$:**</u>

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3} &=& \sqrt{2x-5} \\
\sqrt{5\cdot\left(-\frac{7}{31}\right)+1}+\sqrt{4\cdot\left(-\frac{7}{31}\right)-3} &=& \sqrt{2\cdot\left(-\frac{7}{31}\right)-5} \\
\sqrt{-\frac{4}{31}}+\sqrt{-\frac{121}{31}} &=& \sqrt{-\frac{169}{31}}
\end{array}$$

Da die Wurzeln alle keine (reelle) Lösung haben, ist $x_1=-\frac{7}{31}$ keine Lösung.

<u>**Probe mit $\mathbf{x_2=3}$:**</u>

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3} &=& \sqrt{2x-5} \\
\sqrt{5\cdot3+1}+\sqrt{4\cdot3-3} &=& \sqrt{2\cdot3-5} \\
\sqrt{16}+\sqrt{9} &=& \sqrt{1} \\
4+3 &\neq& 1
\end{array}$$

Auch $x_2=3$ erfüllt nicht die Gleichung.

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\ \}}$

## 4.6 Lösung Aufgabe 6

$$4 \cdot \sqrt{3x+4} - 4 \cdot \sqrt{4x+1} = \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}}$$

Es sollt auffallen, dass der Nenner des Bruches annähernd identisch mit der linken Gleichungsseite ist. Nur das Rechenzeichen dazwischen ist anders. Multipliziert man nun die Gleichung mit dem (rechten) Nenner, dann löst die dritte Binomische Formel links alle Wurzeln auf.

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sqrt{3x+4} - 4 \cdot \sqrt{4x+1} &= \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}} \\
4 \cdot \left(\sqrt{3x+4} - \sqrt{4x+1}\right) &= \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}} && | \cdot \left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}\right) \\
4 \cdot \left((3x+4) - (4x+1)\right) &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 \\
4 \cdot (3x+4-4x-1) &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 \\
4 \cdot (-x+3) &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 \\
-4x+12 &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 && | + 1 \\
-4x+13 &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} && | \; (\;)^2 \\
16x^2 - 104x + 169 &= 16 \cdot (3x+4) \\
16x^2 - 104x + 169 &= 48x + 64 && | - 48x - 64 \\
16x^2 - 152x + 105 &= 0 && | : 16 \\
x^2 - \frac{19}{2} + \frac{105}{16} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{19}{4} \pm \sqrt{\frac{361}{16} - \frac{105}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{19}{4} \pm \sqrt{\frac{256}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{19}{4} \pm \frac{16}{4} \\
x_1 = \frac{3}{4} & \qquad x_2 = \frac{35}{4}
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{3}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sqrt{3x+4} - 4 \cdot \sqrt{4x+1} &= \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}} \\
4 \cdot \sqrt{3 \cdot \tfrac{3}{4} + 4} - 4 \cdot \sqrt{4 \cdot \tfrac{3}{4} + 1} &= \frac{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \tfrac{3}{4} + 4} - 1}{\sqrt{3 \cdot \tfrac{3}{4} + 4} + \sqrt{4 \cdot \tfrac{3}{4} + 1}} \\
4 \cdot \sqrt{\frac{25}{4}} - 4 \cdot \sqrt{4} &= \frac{4 \cdot \sqrt{\tfrac{25}{4}} - 1}{\sqrt{\tfrac{25}{4}} + \sqrt{4}} \\
4 \cdot \frac{5}{2} - 4 \cdot 2 &= \frac{4 \cdot \tfrac{5}{2} - 1}{\tfrac{5}{2} + 2} \\
10 - 8 &= \frac{9}{\tfrac{9}{2}} \\
2 &= 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = \frac{35}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sqrt{3x+4} - 4 \cdot \sqrt{4x+1} &= \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}} \\
4 \cdot \sqrt{3 \cdot \tfrac{35}{4} + 4} - 4 \cdot \sqrt{4 \cdot \tfrac{35}{4} + 1} &= \frac{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \tfrac{35}{4} + 4} - 1}{\sqrt{3 \cdot \tfrac{35}{4} + 4} + \sqrt{4 \cdot \tfrac{35}{4} + 1}} \\
4 \cdot \sqrt{\frac{121}{4}} - 4 \cdot \sqrt{36} &= \frac{4 \cdot \sqrt{\tfrac{121}{4}} - 1}{\sqrt{\tfrac{121}{4}} + \sqrt{36}} \\
4 \cdot \frac{11}{2} - 4 \cdot 6 &= \frac{4 \cdot \tfrac{11}{2} - 1}{\tfrac{11}{2} + 6} \\
22 - 24 &= \frac{21}{\tfrac{23}{2}} \\
-2 &\neq \frac{42}{23}
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \left\{\frac{3}{4}\right\}}$

## 4.7 Lösung Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5 && |-x\\
-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5-x && |\,(\;)^2\\
33-x^2-4x &= 25-10x+x^2 && |-33+x^2+4x\\
0 &= 2x^2-6x-8 && |:2\\
0 &= x^2-3x-4\\
x_{1/2} &= \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}\\
x_{1/2} &= \frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}\\
x_1=-1 &\quad x_2=4
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-1}$:**

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5\\
-1-\sqrt{33-(-1)^2-4\cdot(-1)} &= 5\\
-1-6 &\neq 5
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=4}$:**

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5\\
4-\sqrt{33-4^2-4\cdot 4} &= 5\\
4-1 &\neq 5
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\;\}}$

## 4.8 Lösung Aufgabe 8

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}} &=& 2 & |\ (\ )^2 \\
\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1} &=& 4 & |\ (\ )^2 \\
5x+4-2\cdot\sqrt{(5x+4)\cdot(2x-1)}+2x-1 &=& 16 & \\
7x+3-2\cdot\sqrt{10x^2-5x+8x-4} &=& 16 & |-7x-3 \\
-2\cdot\sqrt{10x^2+3x-4} &=& -7x+13 & |\ (\ )^2 \\
4\cdot(10x^2+3x-4) &=& 49x^2-182x+169 & \\
40x^2+12x-16 &=& 49x^2-182x+169 & |-40x^2-12x+16 \\
0 &=& 9x^2-194x+185 & |:9 \\
0 &=& x^2-\frac{194}{9}x+\frac{185}{9} & \\
x_{1/2} &=& \frac{97}{9}\pm\sqrt{\frac{9\,409}{81}-\frac{1\,665}{81}} & \\
x_{1/2} &=& \frac{97}{9}\pm\frac{88}{9} & \\
x_1=\frac{185}{9} && x_2=1 &
\end{array}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{185}{9}}$:**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}} &=& 2 \\
\sqrt{\sqrt{5\cdot\frac{185}{9}+4}-\sqrt{2\cdot\frac{185}{9}-1}} &=& 2 \\
\sqrt{\sqrt{\frac{961}{9}}-\sqrt{\frac{361}{9}}} &=& 2 \\
\sqrt{\frac{31}{3}-\frac{19}{3}} &=& 2 \\
\sqrt{\frac{12}{3}} &=& 2 \\
\sqrt{4} &=& 2
\end{array}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 1}$:**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}} &=& 2 \\
\sqrt{\sqrt{5\cdot 1+4}-\sqrt{2\cdot 1-1}} &=& 2 \\
\sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{1}} &=& 2 \\
\sqrt{3-1} &=& 2 \\
\sqrt{2} &\neq& 2
\end{array}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\left\{\frac{185}{9}\right\}}$

### 4.9 Lösung Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3} &= \sqrt{11x+5} && |\,(\ )^2\\
2x-1+2\cdot\sqrt{(2x-1)\cdot(6x+3)}+6x+3 &= 11x+5 &&\\
8x+2+2\cdot\sqrt{12x^2+6x-6x-3} &= 11x+5 && |-8x-2\\
2\cdot\sqrt{12x^2-3} &= 3x+3 && |\,(\ )^2\\
4\cdot(12x^2-3) &= 9x^2+18x+9 &&\\
48x^2-12 &= 9x^2+18x+9 && |-9x^2-18x-9\\
39x^2-18x-21 &= 0 && |:39\\
x^2-\frac{6}{13}x-\frac{7}{13} &= 0 &&\\
x_{1/2} &= \frac{3}{13}\pm\sqrt{\frac{9}{169}+\frac{91}{169}} &&\\
x_{1/2} &= \frac{3}{13}\pm\frac{10}{13} &&\\
x_1=-\frac{7}{13} & \qquad x_2=1 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-\frac{7}{13}}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3} &= \sqrt{11x+5}\\
\sqrt{2\cdot(-\tfrac{7}{13})-1}+\sqrt{6\cdot(-\tfrac{7}{13})+3} &= \sqrt{11\cdot(-\tfrac{7}{13})+5}\\
\sqrt{-\tfrac{27}{13}}+\sqrt{-\tfrac{3}{13}} &= \sqrt{-\tfrac{12}{13}}
\end{aligned}$$

Keine der Wurzeln hat eine (reelle) Lösung. Daher gehört $x_1$ **nicht** zur Lösungsmenge.

**Probe mit $\mathbf{x_2=1}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3} &= \sqrt{11x+5}\\
\sqrt{2\cdot1-1}+\sqrt{6\cdot1+3} &= \sqrt{11\cdot1+5}\\
\sqrt{1}+\sqrt{9} &= \sqrt{16}\\
1+3 &= 4
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{1\}}$

## 4.10 Lösung Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
2x - 26 \cdot \sqrt{x} + 72 &= 0 && \mid + 26 \cdot \sqrt{x} \\
2x + 72 &= 26 \cdot \sqrt{x} && \mid (\ )^2 \\
4x^2 + 288x + 5\,184 &= 676x && \mid - 676x \\
4x^2 - 388x + 5\,184 &= 0 && \mid : 4 \\
x^2 - 97x + 1\,296 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,409}{4} - 1\,296} \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,409}{4} - \frac{5\,184}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \sqrt{\frac{4\,255}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \frac{65}{2} \\
x_1 = 16 & \quad x_2 = 81
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = 16}$:**

$$\begin{aligned}
2x - 26 \cdot \sqrt{x} + 72 &= 0 \\
2 \cdot 16 - 26 \cdot \sqrt{16} + 72 &= 0 \\
32 - 26 \cdot 4 + 72 &= 0 \\
32 - 104 + 72 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 81}$:**

$$\begin{aligned}
2x - 26 \cdot \sqrt{x} + 72 &= 0 \\
2 \cdot 81 - 26 \cdot \sqrt{81} + 72 &= 0 \\
162 - 26 \cdot 9 + 72 &= 0 \\
162 - 234 + 72 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{16; 81\}}$

## 4.11 Lösung Aufgabe 11

$$\begin{aligned}
2x - 3 \cdot \sqrt{x} &= 2 && \mid + 3 \cdot \sqrt{x} - 2 \\
2x - 2 &= 3 \cdot \sqrt{x} && \mid (\ )^2 \\
4x^2 - 8x + 4 &= 9 \cdot x && \mid - 9x \\
4x^2 - 17x + 4 &= 0 && \mid : 4 \\
x^2 - \frac{17}{4}x + 1 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - 1} \\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - \frac{64}{64}} \\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{225}{64}} \\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \frac{15}{8} \\
x_1 = \frac{1}{4} & \qquad x_2 = 4
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{1}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
2x - 3 \cdot \sqrt{x} &= 2 \\
2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} &= 2 \\
\frac{1}{2} - \frac{3}{2} &\neq 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 4}$:**

$$\begin{aligned}
2x - 3 \cdot \sqrt{x} &= 2 \\
2 \cdot 4 - 3 \cdot \sqrt{4} &= 2 \\
8 - 6 &= 2
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{4\}}$

## 4.12 Lösung Aufgabe 12

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5} &= 2 && |\ (\ )^2\\
x+3+2\cdot\sqrt{(x+3)\cdot(2x+5)}+2x+5 &= 4 &&\\
3x+8+2\cdot\sqrt{2x^2+5x+6x+15} &= 4 &&\\
3x+8+2\cdot\sqrt{2x^2+11x+15} &= 4 && |-3x-8\\
2\cdot\sqrt{2x^2+11x+15} &= -3x-4 && |\ (\ )^2\\
4\cdot(2x^2+11x+15) &= 9x^2+24x+16 &&\\
8x^2+44x+60 &= 9x^2+24x+16 && |-8x^2-44x-60\\
0 &= x^2-20x-44 &&\\
x_{1/2} &= 10\pm\sqrt{100+44} &&\\
x_{1/2} &= 10\pm 12 &&\\
x_1=-2 & \qquad x_2=22 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-2}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5} &= 2\\
\sqrt{-2+3}+\sqrt{2\cdot(-2)+5} &= 2\\
1+1 &= 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=22}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5} &= 2\\
\sqrt{22+3}+\sqrt{2\cdot 22+5} &= 2\\
5+7 &\neq 2
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{-2\}}$

## 4.13 Lösung Aufgabe 13

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{x+4} &=& \sqrt{2x-1}+6 & |\ (\ )^2 \\
x+4 &=& 2x-1+12\cdot\sqrt{2x-1}+36 & |-2x-35 \\
-x-31 &=& 12\cdot\sqrt{2x-1} & |\ (\ )^2 \\
x^2+62x+961 &=& 144\cdot(2x-1) & \\
x^2+62x+961 &=& 288x-144 & |-288x+144 \\
x^2+226x+1\,105 &=& 0 & \\
x_{1/2} &=& -113\pm\sqrt{12\,769-1\,105} & \\
x_{1/2} &=& 113\pm 108 & \\
x_1=5 && x_2=221 &
\end{array}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1=5}$:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{x+4} &=& \sqrt{2x-1}+6 \\
\sqrt{5+4} &=& \sqrt{2\cdot 5-1}+6 \\
3 &\neq& 3+6
\end{array}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2=221}$:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{x+4} &=& \sqrt{2x-1}+6 \\
\sqrt{221+4} &=& \sqrt{2\cdot 221-1}+6 \\
15 &\neq& 21+6
\end{array}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\ \}}$

## 4.14 Lösung Aufgabe 14

$$\begin{array}{rcll}
30x - 16 \cdot \sqrt{x} + 2 &=& 0 & \mid +16 \cdot \sqrt{x} \\
30x + 2 &=& 16 \cdot \sqrt{x} & \mid (\ )^2 \\
900x^2 + 120x + 4 &=& 256x & \mid -256x \\
900x^2 - 136x + 4 &=& 0 & \mid : 900 \\
x^2 - \frac{34}{225} + \frac{1}{225} &=& 0 & \\
x_{1/2} &=& \frac{17}{225} \pm \sqrt{\frac{289}{50\,625} - \frac{1}{225}} & \\
x_{1/2} &=& \frac{17}{225} \pm \sqrt{\frac{289}{50\,625} - \frac{225}{50\,625}} & \\
x_{1/2} &=& \frac{17}{225} \pm \frac{8}{225} & \\
x_1 = \frac{1}{25} && x_2 = \frac{1}{9} &
\end{array}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{1}{25}}$:**

$$\begin{array}{rcl}
30x - 16 \cdot \sqrt{x} + 2 &=& 0 \\
30 \cdot \frac{1}{25} - 16 \cdot \sqrt{\frac{1}{25}} + 2 &=& 0 \\
\frac{30}{25} - \frac{16}{5} + 2 &=& 0 \\
\frac{6}{5} - \frac{16}{5} + \frac{10}{5} &=& 0
\end{array}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = \frac{1}{9}}$:**

$$\begin{array}{rcl}
30x - 16 \cdot \sqrt{x} + 2 &=& 0 \\
30 \cdot \frac{1}{9} - 16 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} + 2 &=& 0 \\
\frac{30}{9} - \frac{16}{3} + 2 &=& 0 \\
\frac{10}{3} - \frac{16}{3} + \frac{6}{3} &=& 0
\end{array}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \left\{\frac{1}{25}; \frac{1}{9}\right\}}$

## 4.15 Lösung Aufgabe 15

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} &=& \sqrt{3-x}-\sqrt{3+x} & |\ (\ )^2 \\
5+x-2\cdot\sqrt{(5+x)(5-x)}+5-x &=& 3-x-2\cdot\sqrt{(3-x)(3+x)}+3+x & \\
10-2\cdot\sqrt{25-x^2} &=& 6-2\cdot\sqrt{9-x^2} & |-6 \\
4-2\cdot\sqrt{25-x^2} &=& -2\cdot\sqrt{9-x^2} & |:2 \\
2-\sqrt{25-x^2} &=& -\sqrt{9-x^2} & |\ (\ )^2 \\
4-4\cdot\sqrt{25-x^2}+25-x^2 &=& 9-x^2 & |+x^2 \\
-4\cdot\sqrt{25-x^2}+29 &=& 9 & |-29 \\
-4\cdot\sqrt{25-x^2} &=& -20 & |\ (\ )^2 \\
16\cdot(25-x^2) &=& 400 & \\
400-64x^2 &=& 400 & |-400 \\
-64x^2 &=& 0 & |:(-64) \\
x^2 &=& 0 & |\ \sqrt{\ } \\
x &=& 0 &
\end{array}$$

**<u>Probe mit x = 0:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} &=& \sqrt{3-x}-\sqrt{3+x} \\
\sqrt{5+0}-\sqrt{5-0} &=& \sqrt{3-0}-\sqrt{3+0} \\
\sqrt{5}-\sqrt{5} &=& \sqrt{3}-\sqrt{3} \\
0 &=& 0
\end{array}$$

Aus dem Ergebnis der Probe ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{0\}}$

## 4.16 Lösung Aufgabe 16

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1} & = & 3 & |\ (\ )^2 \\
\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1 & = & 9 & |+1 \\
\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5} & = & 10 & |\ (\ )^2 \\
5x+1+2\cdot\sqrt{(5x+1)\cdot(3x-5)}+3x-5 & = & 100 & \\
8x-4+2\cdot\sqrt{15x^2-25x+3x-5} & = & 100 & |-8x+4 \\
2\cdot\sqrt{15x^2-22x-5} & = & -8x+104 & |:2 \\
\sqrt{15x^2-22x-5} & = & -4x+52 & |\ (\ )^2 \\
15x^2-22x-5 & = & 16x^2-416x+2\,704 & |-15x^2+22x+5 \\
0 & = & x^2-394x+2\,709 & \\
x_{1/2} & = & 197\pm\sqrt{38\,809-2\,709} & \\
x_{1/2} & = & 197\pm\sqrt{36\,100} & \\
x_{1/2} & = & 197\pm 190 & \\
x_1=7 & & x_2=387 &
\end{array}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = 7}$:**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1} & = & 3 \\
\sqrt{\sqrt{5\cdot 7+1}+\sqrt{3\cdot 7-5}-1} & = & 3 \\
\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{16}-1} & = & 3 \\
\sqrt{6+4-1} & = & 3 \\
\sqrt{9} & = & 3
\end{array}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 387}$:**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1} & = & 3 \\
\sqrt{\sqrt{5\cdot 387+1}+\sqrt{3\cdot 387-5}-1} & = & 3 \\
\sqrt{\sqrt{1\,936}+\sqrt{1\,156}-1} & = & 3 \\
\sqrt{44+34-1} & = & 3 \\
\sqrt{77} & \neq & 3
\end{array}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{7\}}$

## 4.17 Lösung Aufgabe 17

$$\begin{aligned}
3x-\sqrt{2x+30}+17 &= 0 && \mid +\sqrt{2x+30}\\
3x+17 &= \sqrt{2x+30} && \mid (\ )^2\\
9x^2+102x+289 &= 2x+30 && \mid -2x-30\\
9x^2+100x+259 &= 0 && \mid :9\\
x^2+\frac{100}{9}x+\frac{259}{9} &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel}\\
x_{1/2} &= -\frac{50}{9}\pm\sqrt{\frac{2\,500}{81}-\frac{2\,331}{81}}\\
&= -\frac{50}{9}\pm\frac{13}{9}
\end{aligned}$$

$$x_1=-\frac{50}{9}+\frac{13}{9}=-\frac{37}{9} \qquad x_2=-\frac{50}{9}-\frac{13}{9}=-7$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-\frac{37}{9}}$:**

$$\begin{aligned}
3\cdot\left(-\frac{37}{9}\right)-\sqrt{2\cdot\left(-\frac{37}{9}\right)+30}+17 &= 0\\
-\frac{111}{9}-\sqrt{-\frac{74}{9}+\frac{270}{9}}+17 &= 0\\
-\frac{37}{3}-\frac{16}{3}+17 &= 0\\
-\frac{51}{3}+17 &= 0\\
-17+17 &= 0
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=-7}$:**

$$\begin{aligned}
3\cdot(-7)-\sqrt{2\cdot(-7)+30}+17 &= 0\\
-21-4+17 &= 0\\
-8 &\neq 0
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\left\{-\frac{37}{9}\right\}}$

## 4.18 Aufgabe 18

$$
\begin{array}{rcll}
\sqrt{7x-3}+\sqrt{6x+12} & = & 1 & \mid -\sqrt{6x+12} \\
\sqrt{7x-3} & = & 1-\sqrt{6x+12} & \mid(\ )^2 \\
7x-3 & = & 1^2-2\cdot\sqrt{6x+12}+(6x+12) & \\
7x-3 & = & 1-2\cdot\sqrt{6x+12}+6x+12 & \mid -6x-13 \\
x-16 & = & -2\cdot\sqrt{6x+12} & \mid(\ )^2 \\
x^2-32x+256 & = & 4\cdot(6x+12) & \\
x^2-32x+256 & = & 24x+48 & \mid -24x-48 \\
x^2-56x+208 & = & 0 & \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} & = & 28\pm\sqrt{784-208} & \\
 & = & 28\pm 24 & \\
x_1=28+24=52 & & x_2=28-24=4 &
\end{array}
$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1=52}$:</u>**

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{7\cdot 52-3}+\sqrt{6\cdot 52+12} & = & 1 \\
\sqrt{361}+\sqrt{324} & = & 1 \\
19+18 & \neq & 0
\end{array}
$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2=4}$:</u>**

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{7\cdot 4-3}+\sqrt{6\cdot 4+12} & = & 1 \\
\sqrt{25}+\sqrt{36} & = & 1 \\
5+6 & \neq & 1
\end{array}
$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\ \}}$

### 4.19 Aufgabe 19

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{x+6}}+\sqrt{x+6} &= \frac{\sqrt{11-5x}}{2\cdot\sqrt{x+6}} && |\cdot 2\cdot\sqrt{x+6}\\
4+2\cdot(x+6) &= \sqrt{11-5x}\\
4+2x+12 &= \sqrt{11-5x}\\
2x+16 &= \sqrt{11-5x} && |(\;)^2\\
4x^2+64x+256 &= 11-5x && |-11+5x\\
4x^2+69x+245 &= 0 && |:4\\
x^2+\frac{69}{4}x+\frac{245}{4} &= 0 && |\ p\text{-}q\text{-Formel}\\
x_{1/2} &= -\frac{69}{8}\pm\sqrt{\frac{4\,761}{64}-\frac{3\,920}{64}}\\
&= -\frac{69}{8}\pm\frac{29}{8}
\end{aligned}$$

$$x_1=-\frac{69}{8}+\frac{29}{8}=-5 \qquad x_2=-\frac{69}{8}-\frac{29}{8}=-\frac{98}{8}=-\frac{49}{4}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-5}$:**

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{-5+6}}+\sqrt{-5+6} &= \frac{\sqrt{11-5\cdot(-5)}}{2\cdot\sqrt{-5+6}}\\
\frac{2}{1}+1 &= \frac{6}{2}\\
3 &= 3
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=-\frac{49}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{-\frac{49}{4}+6}}+\sqrt{-\frac{49}{4}+6} &= \frac{\sqrt{11-\frac{49}{4}\cdot\left(-\frac{49}{4}\right)}}{2\cdot\sqrt{-\frac{49}{4}+6}}\\
\frac{2}{\sqrt{-25}}+\sqrt{-25} &= \frac{\sqrt{\frac{2\,577}{16}}}{2\cdot\sqrt{-25}}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle muss abgebrochen werden, da bei mehreren Wurzeln der Wurzelinhalt **negativ** ist. Es gibt keine (reellen) Lösungen.

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{-5\}}$

## 4.20 Aufgabe 20

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x+6}-\sqrt{2x+6} &= \sqrt{10-6x}-\sqrt{5x+6} && \mid +\sqrt{5x+6}\\
2\cdot\sqrt{5x+6}-\sqrt{2x+6} &= \sqrt{10-6x} && \mid (\;)^2\\
4\cdot(5x+6)-4\cdot\sqrt{5x+6}\cdot\sqrt{2x+6}+(2x+6) &= 10-6x\\
20x+24-4\cdot\sqrt{(5x+6)(2x+6)}+2x+6 &= 10-6x\\
22x+30-4\cdot\sqrt{10x^2+30x+12x+36} &= 10-6x && \mid -22x-30\\
-4\cdot\sqrt{10x^2+42x+36} &= -28x-20 && \mid :(-4)\\
\sqrt{10x^2+42x+36} &= 7x+5 && \mid (\;)^2\\
10x^2+42x+36 &= 49x^2+70x+25 && \mid -49x^2-70x-25\\
-39x^2-28x+11 &= 0 && \mid :(-39)\\
x^2+\frac{28}{39}x-\frac{11}{39} &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel}\\
x_{1/2} &= -\frac{14}{39}\pm\sqrt{\frac{196}{1\,521}+\frac{429}{1\,521}}\\
&= -\frac{14}{39}\pm\sqrt{\frac{625}{1\,521}}\\
x_{1/2} &= -\frac{14}{39}\pm\frac{25}{39}\\
x_1 = \frac{11}{39} & \qquad x_2=\frac{39}{39}=1
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=\frac{11}{39}}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{5\cdot\frac{11}{39}+6}-\sqrt{2\cdot\frac{11}{39}+6} &= \sqrt{10-6\cdot\frac{11}{39}}-\sqrt{5\cdot\frac{11}{39}+6}\\
\sqrt{\frac{55+234}{39}}-\sqrt{\frac{22+234}{39}} &= \sqrt{\frac{390-66}{39}}-\sqrt{\frac{55+234}{39}}\\
\frac{17}{39}-\frac{16}{39} &= \frac{18}{39}-\frac{17}{39}\\
\frac{1}{39} &= \frac{1}{39}
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=1}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{5\cdot1+6}-\sqrt{2\cdot1+6} &= \sqrt{10-6\cdot1}-\sqrt{5\cdot1+6}\\
\sqrt{11}-\sqrt{8} &= \sqrt{4}-\sqrt{11}\\
0{,}488\,197\,666 &\neq -1{,}316\,624\,790
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\left\{\frac{11}{39}\right\}}$

### 4.21 Aufgabe 21

$$
\begin{array}{rcll}
\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2-1} & = & \sqrt{x^2+1} & |(\ )^2 \\
\underbrace{2\cdot x^2}_{a^2}+\underbrace{2\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-1}}_{2ab}+\underbrace{x^2-1}_{b^2} & = & x^2+1 & |-3x^2+1 \\
2\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-1} & = & 2-2x^2 & |(\ )^2 \\
4\cdot 2\cdot x^2\cdot(x^2-1) & = & 4-8x^2+4x^4 & \\
8x^4-8x^2 & = & 4-8x^2+4x^4 & |-8x^4+8x^2 \\
0 & = & -16x^4+4 & |+16x^4 \\
16x^4 & = & 4 & |:16 \\
x^4 & = & \frac{1}{4} & |\sqrt[4]{\ } \\
x_{1/2} & = & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \\
x_1=\frac{1}{\sqrt{2}} & & x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}} &
\end{array}
$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}}$:**

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1} & = & \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
1+\sqrt{\frac{1}{2}-1} & = & \sqrt{\frac{1}{2}+1} \\
1+\sqrt{-\frac{1}{2}} & = & \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{array}
$$

Da $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ keine Reelle Zahl darstellt, ist $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **keine** Lösung der Gleichung.

**Probe mit $\mathbf{x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}}$:**

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1} & = & \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
-1+\sqrt{\frac{1}{2}-1} & = & \sqrt{\frac{1}{2}+1} \\
-1+\sqrt{-\frac{1}{2}} & = & \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{array}
$$

Da $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ keine (reelle) Zahl darstellt, ist $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **keine** Lösung der Gleichung.

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\ \}}$